

Méthodes mathématiques pour la physique

08/01/2010

durée de l'examen: 3h

1. Le 01/01/2010, Gertrude ouvre un compte épargne, avec versement initial de 1000 euros. Ce compte est ensuite alimenté par des versements mensuels de 200 euros le premier jour de chaque mois entre le février et le juin 2010 (soit 5 versements).

Soient D le montant total des dépôts et t la durée de l'épargne, mesurée en mois.

- [1 point] Tracer le graphe de $D(t)$.
- [2 points] Calculer la dérivée de $D(t)$ au sens des distributions. Commentez le résultat.

Le taux de rémunération du compte est de 3% annuels.

- [2 points] Calculer, à 1 centime près, le montant des intérêts acquis au 30 juin 2010.
- [1 point] Quelle équation différentielle vérifie le montant total $E(t)$ de l'épargne?

2. [3 points] En utilisant la méthode de la fonction de Green, trouver la solution de l'équation différentielle

$$y''(x) + 6y'(x) + 5y(x) = \cos x,$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

[3 points] Vérifier le résultat à l'aide de la transformation de Laplace.

3. Soit $f(x)$ la fonction de période 2π définie par

$$f(x) = \sin ax \quad \text{pour } x \in [-\pi, \pi].$$

- [2 points] Développer $f(x)$ en série de Fourier.
- [2 points] En utilisant ce développement, montrer que

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2k+1}{a^2 - (2k+1)^2} = \frac{\pi}{4 \cos \frac{\pi a}{2}}.$$

- [2 points] En appliquant l'égalité de Parseval à $f(x)$, calculer la somme infinie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(a^2 - n^2)^2}.$$

4. [3 points] Soient $f(t)$ une fonction lisse qui tend rapidement vers zéro en l'infini avec toutes ses dérivées et $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$ sa transformation de Fourier. Démontrer la formule de resommation de Poisson:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t + nT) = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{2\pi k}{T}\right) e^{2\pi i k t / T},$$

où $T \in \mathbb{R}_{>0}$ est un paramètre.

[3 points] En utilisant la formule de Poisson, démontrer que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \coth \pi a.$$

Indication: posez $t = 0$, $T = 1$.